

Das Ersatzwertverfahren als Hilfsmittel bei der iterativen Bestimmung von Matrizen- Eigenwerten

Falk, Sigurd

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 8, 1956,
S.99-110



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Das Ersatzwertverfahren als Hilfsmittel bei der iterativen Bestimmung von Matrizen-Eigenwerten

Von Sigurd Falk

Vorgelegt von Herrn H. Schaefer

Mit 9 Abbildungen

Summary: The iteration-method in algebraic Eigenvalueproblems gives, if at all, the Eigenvalue of maximal length (or one of such). The autor presents a method for calculating also other Eigenvalues by iteration, provided that the Eigenvalue of maximal length together with his Eigenvectors is known.

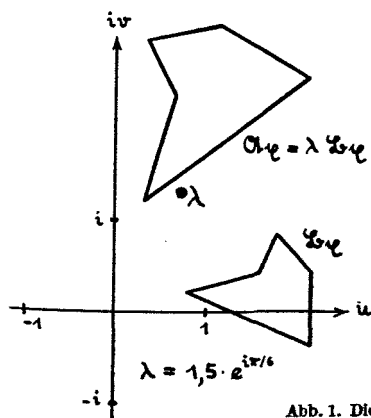
Übersicht: Das Iterationsverfahren bei algebraischen Eigenwertaufgaben konvergiert, wenn überhaupt, gegen den (oder einen) Eigenwert mit maximalem Betrage. Es wird ein Verfahren angegeben, mit dessen Hilfe auch andere Eigenwerte iterativ bestimmt werden können, wenn der Eigenwert mit maximalem Betrage nebst zugehörigen Eigenvektoren bereits bekannt ist.

1. Mathematische Grundlagen

Vorgelegt seien die beiden einander zugeordneten algebraischen Eigenwertaufgaben n -ter Ordnung

$$\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \lambda \mathfrak{B} \mathfrak{x}; \quad \mathfrak{y}' \mathfrak{A} = \lambda \mathfrak{y}' \mathfrak{B} \quad (1.1)$$

und gesucht sind Eigenvektoren \mathfrak{x}_i bzw. \mathfrak{y}_i' , die diesen Gleichungen genügen, für welche also die „Bilder“ $\mathfrak{A} \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{B} \mathfrak{x}$ bzw. $\mathfrak{x}' \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{x}' \mathfrak{B}$ einander mit dem skalaren Faktor λ_i , dem sogenannten Eigenwert, proportional sind. Die von den Komponenten der Vektoren $\mathfrak{A} \mathfrak{x}_i$ und $\mathfrak{B} \mathfrak{x}_i$ (bzw. $\mathfrak{y}_i' \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{y}_i' \mathfrak{B}$) in der komplexen Zahlenebene gebildeten n -Ecke gehen dann durch eine Drehstreckung auseinander hervor. (Abb. 1 für $n = 5$).



Unter der Voraussetzung

$$|\mathfrak{B}| \neq 0; \quad n \text{ linear unabhängige} \\ \text{Eigenvektoren vorhanden} \quad (1.2)$$

lassen sich mit den n -reihigen Matrizen

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n), |\mathfrak{A}| \neq 0; \quad (1.3) \\ \mathfrak{B} = (\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_n), |\mathfrak{B}| \neq 0$$

Abb. 1. Die Bilder $\mathfrak{A} \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{B} \mathfrak{x}$ eines Eigenvektors \mathfrak{x} in der komplexen Zahlenebene.

und der Diagonalmatrix \mathfrak{L} der Eigenwerte λ_i die Gleichungen (1.1) zusammenfassen in

$$\mathfrak{A} \mathfrak{X} = \mathfrak{B} \mathfrak{X} \mathfrak{L}; \quad \mathfrak{B}' \mathfrak{A} = \mathfrak{L} \mathfrak{B}' \mathfrak{B} \quad (1.4)$$

Ferner zeigt sich, daß unter der Voraussetzung (1.2) die Eigenvektoren \mathfrak{x}_i und \mathfrak{y}_i' verallgemeinert orthogonal sind:

$$\mathfrak{y}_i' \mathfrak{B} \mathfrak{x}_k = \delta_{ik} \text{ oder } \mathfrak{B}' \mathfrak{B} \mathfrak{X} = \mathfrak{E}, \text{ d. h. } \mathfrak{B}' \mathfrak{B} = \mathfrak{X}^{-1} \quad (1.5)$$

Somit folgt aus (1.4)

$$\mathfrak{B}' \mathfrak{A} \mathfrak{X} = \mathfrak{B}' \mathfrak{B} \mathfrak{X} \mathfrak{L} = \mathfrak{L} \quad (1.6)$$

Das heißt: Mit Hilfe der Eigenvektoren \mathfrak{x}_i und \mathfrak{y}_i' läßt sich \mathfrak{B} in die Einheitsmatrix \mathfrak{E} und gleichzeitig \mathfrak{A} in die Diagonalmatrix \mathfrak{L} transformieren. Aus (1.4) und (1.5) entnehmen wir noch

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \mathfrak{X} \mathfrak{L} \mathfrak{X}^{-1} = \mathfrak{B} \mathfrak{X} \mathfrak{L} \mathfrak{B}' \mathfrak{B} \quad (1.7)$$

Dies nach den Eigenwerten λ_i geordnet ergibt die Darstellung der Matrix \mathfrak{A} als Summe von n dyadischen Produkten:

$$\mathfrak{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathfrak{B} \mathfrak{x}_i \mathfrak{y}_i' \mathfrak{B} \quad (1.8)$$

2. Das klassische Iterationsverfahren

Ausgehend von einem beliebigen, jedoch von Null verschiedenen Vektor \mathfrak{z}_0 bilden wir die Vektorfolge

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B} \mathfrak{z}_1 &= \mathfrak{A} \mathfrak{z}_0 \\ \mathfrak{B} \mathfrak{z}_2 &= \mathfrak{A} \mathfrak{z}_1 \\ &\dots \dots \dots \\ \mathfrak{B} \mathfrak{z}_m &= \mathfrak{A} \mathfrak{z}_{m-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Nun denken wir uns \mathfrak{z}_0 nach den gemäß (1.5) normierten Eigenvektoren \mathfrak{x}_i entwickelt

$$\mathfrak{z}_0 = \sum_{e=1}^n c_e \mathfrak{x}_e \quad (2.2)$$

und von links mit \mathfrak{A} multipliziert; dann wird nach (2.1) und (1.1):

$$\mathfrak{B} \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{A} \mathfrak{z}_0 = \mathfrak{A} \sum_{e=1}^n c_e \mathfrak{x}_e = \mathfrak{B} \sum_{e=1}^n \lambda_e c_e \mathfrak{x}_e, \quad (2.3)$$

also, da $|\mathfrak{B}| \neq 0$ vorausgesetzt:

$$\mathfrak{z}_1 = \sum_{e=1}^n \lambda_e c_e \mathfrak{x}_e \quad (2.4)$$

und ganz allgemein

$$\mathfrak{z}_m = \sum_{e=1}^n \lambda_e^m c_e \mathfrak{x}_e \quad (2.5)$$

Die Entwicklungskoeffizienten c_e bekommen wir durch Multiplikation der Gleichung (2.2) von links mit $\mathfrak{y}_i' \mathfrak{B}$ ($i = 1, 2 \dots n$), und zwar wird wegen (1.5)

$$c_i = \mathfrak{y}_i' \mathfrak{B} \mathfrak{z}_0 \quad (2.6)$$

Jetzt ordnen wir die Eigenwerte nach der Größe ihrer Beträge:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (2.7)$$

und unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1:

$$|\lambda_1| > |\lambda_\varrho|; \quad \varrho = 2, 3 \dots n \quad (2.8)$$

Dann überwiegt für genügend großes m in der Summe (2.5) wegen der fortgesetzten Potenzierung der λ_i — falls nicht zufällig $c_1 = 0$ ist — der erste Summand immer mehr, d. h. der Vektor δ_m konvergiert gegen den Eigenvektor \mathbf{r}_1 mit dem maximalen Betrage $|\lambda_1|$. Die Güte der Konvergenz hängt im wesentlichen ab von dem Verhältnis $|\lambda_1| : |\lambda_2|$.

Fall 2:

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_r| > |\lambda_\varrho|; \quad \varrho = r + 1, \dots n \quad (2.9)$$

Es liegen r Eigenwerte auf dem Kreise mit dem Radius $|\lambda_1|$ um den Nullpunkt der komplexen Zahlenebene, und die übrigen $n - r$ im Inneren dieses Kreises. Jetzt überwuchern bei fortschreitender Iteration die ersten r Summanden in (2.5) alle übrigen, falls nicht zufällig $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$ ist; der Vektor δ_m wird zwar allmählich in den von den ersten r Eigenvektoren aufgespannten r -dimensionalen Unterraum R_r hineingezogen, schweift aber trotz noch so großer Schrittzahl m ziellos in diesem umher. Konvergenz tritt somit nicht ein, es sei denn, daß insbesondere $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r$ ist, dann aber stellt jeder beliebige Vektor des R_r einen Eigenvektor dar. Als Beispiel zeigt die Abb. 2 die ersten 15 Vektoren $\delta_0, \delta_1 \dots \delta_{14}$ für

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{E}; \quad \delta_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

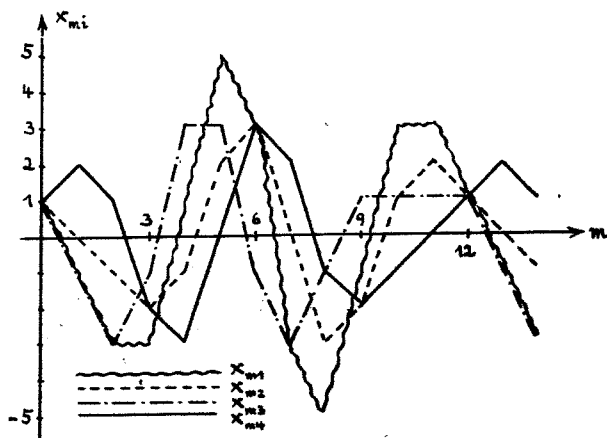


Abb. 2. Die Iterationsfolge $\delta_0 \dots \delta_{14}$ für das Beispiel 2.10.

Hier kehrt die Vektorfolge sogar periodisch wieder, da $\delta_{12} = \mathfrak{A}^{12} \delta_0 = \delta_0$ ist. Alle vier Eigenwerte sind voneinander verschieden und liegen auf dem Einheitskreis der komplexen Zahlenebene; es ist $\mathfrak{A}^{12} = \mathfrak{E}$.

Zusammengefaßt: wenn überhaupt, so konvergiert das Iterationsverfahren bei beliebigem Ausgangsvektor δ_0 gegen den oder einen Eigenwert mit dem maximalen Betrage.

Bildet man übrigens statt (2.1) die Iterationsfolge

$$w_1' \mathfrak{B} = w_0' \mathfrak{A}, \quad w_2' \mathfrak{B} = w_1' \mathfrak{A} \dots w_m' \mathfrak{B} = w_{m-1}' \mathfrak{A} \quad (2.11)$$

so übertragen sich alle in diesem Abschnitt angegebenen Beziehungen sinngemäß von den Eigenvektoren ξ_i auf die η_i' .

3. Die Iteration gegen beliebige Eigenwerte

Soll der iterierte Vektor (2.5), also die Summe

$$\delta_m = \lambda_1^m c_1 \xi_1 + \lambda_2^m c_2 \xi_2 + \dots + \lambda_n^m c_n \xi_n \quad (3.1)$$

im Falle 1 gegen den oder einen Eigenwert mit dem zweitgrößten Betrage konvergieren, so muß der erste Summand in (3.1) so abgeändert werden, daß er nicht sämtliche anderen, zumindestens aber nicht den zweiten Summanden überwiegt. Um das zu erreichen, gibt es zwei, ihrem Wesen nach völlig verschiedene Gruppen von Verfahren:

1. Gruppe: $c_1 = 0$; \mathfrak{A} und \mathfrak{B} unverändert. Das heißt, der Ausgangsvektor δ_0 muß so gewählt werden, daß er keine Komponente in Richtung von ξ_1 enthält, oder was dasselbe ist, der zunächst beliebig gewählte Vektor δ_0 muß von dem störenden Summanden in (2.2) nach (2.6) gemäß der Vorschrift

$$\tilde{\delta}_0 = \delta_0 - c_1 \xi_1 = \delta_0 - (\eta_1' \mathfrak{B} \delta_0) \xi_1 \quad (3.2)$$

„gereinigt“ werden (Verfahren von Koch [3]). Man kann aber auch den Vektor ξ_1 ganz abspalten und mit einem „reduzierten“ Matrizenpaar der Ordnung $n-1$ in dem von den übrigen Eigenvektoren $\xi_2 \dots \xi_n$ aufgespannten Unterraum operieren.

2. Gruppe: $|\lambda_1| \neq |\lambda|_{\max}$; δ_0 beliebig. Jetzt wird das Matrizenpaar $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit den Eigenwerten λ_i durch ein anderes Paar $\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathfrak{B}}$ mit den Eigenwerten $\tilde{\lambda}_i$ ersetzt, und zwar so, daß λ_1 in einen betragsmäßig kleineren Eigenwert übergeht. Hier bieten sich nun zunächst Matrizenpolynome an, am einfachsten lineare:

$$a) \tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} - l \mathfrak{B} \quad \text{mit} \quad \tilde{\lambda}_i = \lambda_i - l \quad (\text{„Spektralverschiebung“}) \quad (3.3)$$

$$b) \tilde{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A} - l \mathfrak{B})^{-1} \quad \text{mit} \quad \tilde{\lambda}_i = (\lambda_i - l)^{-1} \quad (\text{„Gebrochene Iteration“}) \quad (3.4)$$

Die Wirkungsweise dieser beiden Maßnahmen zeigen die Abb. 3 und 4 für den Sonderfall reeller Eigenwerte (nicht notwendig reeller Matrizen), doch ändert sich im Prinzip nichts für beliebige Eigenwertverteilung in der komplexen Zahlenebene. Schließlich kann man ganz allgemein Paare $\mathfrak{P}, \mathfrak{E}$ der Art

$$\mathfrak{P} = \prod_{s=1}^p (\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A} - l_s \mathfrak{E}), \quad \text{mit} \quad \tilde{\lambda}_i = \prod_{s=1}^p (\lambda_i - l_s)^{s_s} \quad (3.5)$$

mit beliebigen Exponenten s_r heranziehen, um irgendwelche Eigenwerte $\tilde{\lambda}_i$ möglichst klein zu halten, doch wächst der Rechenaufwand dabei im allgemeinen so stark an, daß die Matrizen (3.5) nur noch theoretischen Wert besitzen (z. B. *Theorem von Cayley-Hamilton* für $s_r = 1$, $l_r = \lambda_r$, $p = n$).

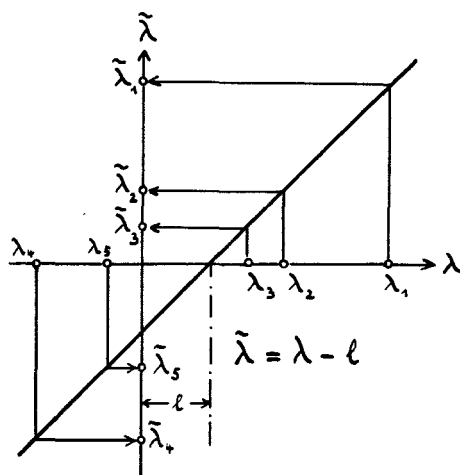


Abb. 3. „Spektralverschiebung“, schematisch.

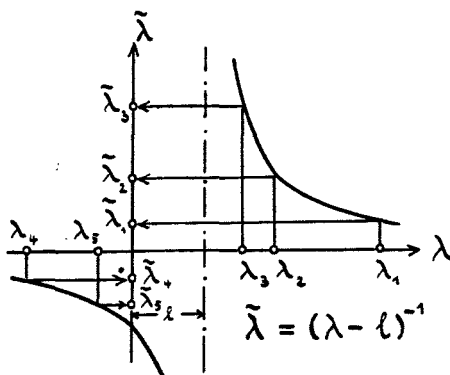


Abb. 4. Eigenwertumordnung zum Zwecke der „gebrochenen Iteration“, schematisch.

Die Methoden beider Gruppen lassen sich sinngemäß so erweitern, daß bei bekanntem $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ auch der Eigenwert mit dem dritt-, viertgrößtem Betrage usw. durch Iteration gewonnen werden kann; auch der Fall 2 (2.9) läßt sich auf ähnliche Weise erledigen.

4. Das Ersatzwertverfahren

Wir betrachten jetzt das Matrizenpaar \mathfrak{A}^* , \mathfrak{B} mit

$$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} + \frac{\sigma - \lambda_i}{v_i' \mathfrak{B} \mathfrak{x}_i} \cdot \mathfrak{B} \mathfrak{x}_i v_i' \mathfrak{B} \quad (4.1)$$

wobei die Eigenvektoren \mathfrak{x}_i und v_i' zum Eigenwert λ_i nicht notwendig normiert zu sein brauchen. Multiplikation mit einem Eigenvektor \mathfrak{x}_k von rechts ergibt:

$$\mathfrak{A}^* \mathfrak{x}_k = \mathfrak{A} \mathfrak{x}_k + \frac{\sigma - \lambda_i}{v_i' \mathfrak{B} \mathfrak{x}_i} \cdot \mathfrak{B} \mathfrak{x}_i v_i' \mathfrak{B} \mathfrak{x}_k = \left\{ \lambda_k + (\sigma - \lambda_i) \frac{v_i' \mathfrak{B} \mathfrak{x}_k}{v_i' \mathfrak{B} \mathfrak{x}_i} \right\} \mathfrak{B} \mathfrak{x}_k \quad (4.2)$$

Also für

$$k = i: \mathfrak{A}^* \mathfrak{x}_k = \sigma \mathfrak{B} \mathfrak{x}_k \quad (4.3)$$

$$k \neq i: \mathfrak{A}^* \mathfrak{x}_k = \lambda_k \mathfrak{B} \mathfrak{x}_k \quad (\text{wegen 1.5}) \quad (4.4)$$

In Worten: Das Paar \mathfrak{A}^* , \mathfrak{B} hat die gleichen Eigenvektoren \mathfrak{x}_k wie \mathfrak{A} , \mathfrak{B} und auch die gleichen Eigenwerte mit Ausnahme von λ_i , das durch den beliebigen (reellen oder komplexen) Wert σ ersetzt worden ist, ein Sachverhalt, den man übrigens auch direkt aus der Summendarstellung (1.8) erkennt.

Alle bisher abgeleiteten Formeln und Beziehungen gelten durchweg auch im Komplexen; sind jedoch \mathfrak{A} und \mathfrak{B} Hermitesch, \mathfrak{B} außerdem definit, was die Realität der Eigenwerte und das Zusammenfallen der \mathfrak{x}_k mit den v_k nach sich zieht, so führt man zweckmäßigerweise statt der quadratischen Formen $\mathfrak{x}' \mathfrak{A} \mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}' \mathfrak{B} \mathfrak{x}$ die jetzt stets reellen Hermiteschen Formen $\bar{\mathfrak{x}}' \mathfrak{A} \mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}' \mathfrak{B} \mathfrak{x}$ heran, so daß (4.1) übergeht in

$$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} + \frac{\sigma - \lambda_i}{\bar{\mathfrak{x}}_i' \mathfrak{B} \mathfrak{x}_i} \cdot \mathfrak{B} \mathfrak{x}_i \bar{\mathfrak{x}}_i' \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} = \bar{\mathfrak{A}}', \quad \mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{B}}' \quad \text{def.} \quad (4.5)$$

oder für das spezielle Eigenwertproblem $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} + \frac{\sigma - \lambda_i}{\bar{\mathfrak{x}}_i' \mathfrak{x}_i} \cdot \mathfrak{x}_i \bar{\mathfrak{x}}_i', \quad \mathfrak{A} = \bar{\mathfrak{A}}', \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{E} \quad (4.6)$$

Das durch (4.1) definierte „Ersatzwertverfahren“ gehört sowohl zur ersten wie zur zweiten der beiden im Abschnitt 3. besprochenen Gruppen von Methoden und verbindet deren beider Vorteile in idealer Weise. Ein Vergleich von (3.2) mit (4.1) für den ersten Iterationsschritt gibt mit $i = 1$:

$$\mathfrak{B} \delta_1 = \mathfrak{A} \tilde{\delta}_0 = \mathfrak{A} \delta_0 - c_1 \mathfrak{A} \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{A} \delta_0 - c_1 \lambda_1 \mathfrak{B} \mathfrak{x}_1 \quad (4.7)$$

$$\mathfrak{B} \delta_1 = \mathfrak{A}^* \delta_0 = \mathfrak{A} \delta_0 + \frac{\sigma - \lambda_1}{v_1' \mathfrak{B} \mathfrak{x}_1} \cdot \mathfrak{B} \mathfrak{x}_1 v_1' \mathfrak{B} \delta_0 = \mathfrak{A} \delta_0 + c_1 (\sigma - \lambda_1) \mathfrak{B} \mathfrak{x}_1 \quad (4.8)$$

Für $\sigma = 0$ geht somit bei der Iteration (4.1) in (3.2) über. Für diesen Sonderfall wurde das hier beschriebene Verfahren nach Angaben von Bodewig [1] bereits von Hotelling [2] für numerische Zwecke eingeführt und als „Deflationsprozeß“ bezeichnet — ein Name, der freilich für beliebige Werte σ kaum am Platze ist.

Die Formel (4.1) gestattet es selbstredend, auch mehrere bereits bekannte Eigenwerte $\lambda_1 \dots \lambda_r$ nacheinander oder gleichzeitig durch beliebige Werte $\sigma_1 \dots \sigma_r$ zu ersetzen.

5. Praktische Durchführung und Beispiele

Der Eigenwert λ_1 mit dem maximalen Betrage sei nun nebst zugehörigen Eigenvektoren \mathfrak{x}_1 und \mathfrak{y}_1' bekannt; dann wählt man irgendeinen geeigneten Wert σ , in welchen λ übergehen soll

- 5 I) und bildet nach (4.1) bzw. (4.5) die Matrix \mathfrak{A}^* ,
oder aber, insbesondere, wenn \mathfrak{A} viele Nullen enthält, die durch den
Ersatzprozeß im allgemeinen natürlich verlorengehen,
- 5 II) man iteriert wie gewöhnlich mit \mathfrak{A} und \mathfrak{B} und berücksichtigt bei jedem
Schritt den zweiten Summanden in (4.1) bzw. (4.5) erst nachträglich —
ein Vorgehen, das an die Formel (3.2) (Verfahren von Koch) erinnert,
diesem gegenüber jedoch den entscheidenden Vorteil besitzt, daß selbst
bei nur ungenau bekanntem \mathfrak{r}_1 und \mathfrak{v}_1' die Vektorfolge der \mathfrak{z}_i für geeignet
gewähltes σ ungestört gegen \mathfrak{r}_2 konvergiert!

Falls \mathfrak{B} Diagonalmatrix ist, ermittelt man vor der Iteration mit Hilfe des Satzes von *Gerschgorin* das Gebiet der komplexen Zahlenebene (bei Hermiteischen Paaren der reellen Achse), innerhalb dessen sämtliche Eigenwerte liegen müssen.

Beispiel 1: Gegeben ist das reellsymmetrische Matrizenpaar $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ (5.1), ferner der Eigenwert mit dem maximalen Betrage $\lambda_1 = 6$ mit dem zugehörigen Eigenvektor \mathfrak{x}_1 . Gesucht wird der nächstgrößte positive Eigenwert.

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{r}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \lambda_1 = 6 \quad (5.1)$$

Um die Hauptdiagonalelemente a_{ii} schlagen wir Kreise mit den Radien $\sum |a_{ik}|$ und finden nach *Gerschgorin* den Bereich, innerhalb dessen alle Eigenwerte liegen; hier folgt insbesondere wegen der Realität sämtlicher Eigenwerte aus Abb. 5:

$$-4 \leq \lambda_i \leq +10, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.2)$$

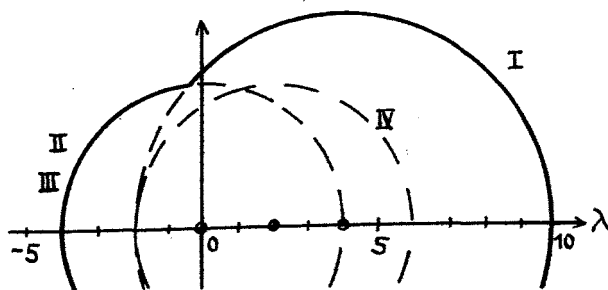


Abb. 5. Der Satz von Gerschgorin für das Beispiel 1.

Wir wählen nun im Hinblick auf den Nenner $\varepsilon_1' \varepsilon_1 = 12$ in (4.6) etwa $\sigma = -6$, bekommen

$$5 \text{ I) } \mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} + \frac{-6 - 6}{12} \varepsilon_1 \varepsilon_1' = \mathfrak{A} - \varepsilon_1 \varepsilon_1' \quad (5.3)$$

und rücken nach (3.3) das ganze Spektrum um 6 nach links, um sicherzugehen, daß nicht irgendein negativer Eigenwert betragsmäßig größer wird als der gesuchte zweitgrößte positive Eigenwert λ_2 :

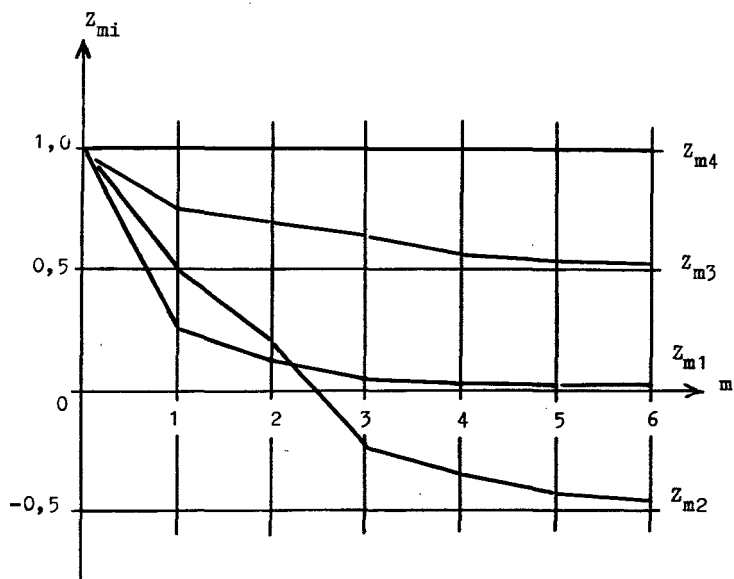
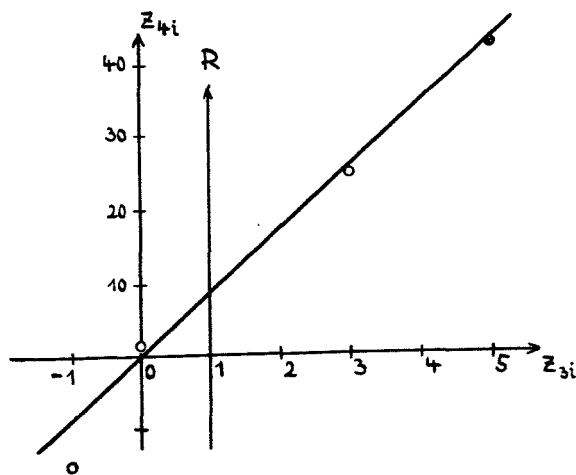
$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{A}}^* &= \mathfrak{A}^* + 6 \mathfrak{E} = \mathfrak{A} - \varepsilon_1 \varepsilon_1' + 6 \mathfrak{E} = \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad (5.4) \end{aligned}$$

Diese Matrix $\tilde{\mathfrak{A}}^*$ hat also die Eigenwerte $\lambda_2 + 6$, $\lambda_3 + 6$, $\lambda_4 + 6$ und $\sigma + 6 = 0$. Die Iteration ergibt nun die Folge:

$$\begin{array}{c} \tilde{\mathfrak{A}}^* \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathfrak{z}_0 \quad \mathfrak{z}_1 \quad \mathfrak{z}_2 \quad \mathfrak{z}_3 \quad \mathfrak{z}_4 \quad \mathfrak{z}_5 \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -33 \\ 43 \\ 79 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 22 \\ 31 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 16 \\ 25 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -15 \\ 25 \\ 43 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -33 \\ 43 \\ 79 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -322 \\ 372 \\ 706 \end{bmatrix} \quad \mathfrak{z}_6 \end{array}$$

Da es auf die Länge der iterierten Vektoren nicht ankommt, kann man nach jedem Schritt einen beliebigen gemeinsamen Faktor herausziehen und wird überdies zu Anfang die Komponenten stark abrunden, um erst allmählich zu mehreren Dezimalstellen überzugehen. Die Abb. 6 zeigt die Vektoren $\mathfrak{z}_0 \dots \mathfrak{z}_6$, die vierten Komponenten z_{m4} sind der Übersichtlichkeit halber zu eins gemacht worden. Man sieht, wie schnell sich die einzelnen Komponenten beruhigen und ihre endgültigen Plätze aufsuchen (der zugehörige Eigenvektor ist $\varepsilon_2 = 0; -0,5; 0,5; 1$).

Abb. 6. Die Iterationsfolge $\bar{z}_0 \dots \bar{z}_6$ für das Beispiel 1.Abb. 7. Die Vektoren \bar{z}_3 und \bar{z}_4 für das Beispiel 1.

Einen Näherungswert für den Eigenwert bekommt man auf folgende Weise: Die Komponenten zweier durch Iteration auseinander hervorgegangenen Vektoren δ_m und δ_{m+1} werden in einer $z_{mi} - z_{m+1,i}$ -Ebene aufgetragen; für einen Eigenvektor wäre $\delta_{m+1} = \lambda \delta_m$, also auch $z_{m+1,i} = \lambda z_{mi}$, die n aufgetragenen Punkte lägen somit auf einer Geraden durch den Nullpunkt mit der Steigung λ . Da die Iteration den Eigenvektor nur angenähert ergibt, streuen die Punkte noch etwas; man legt deshalb nach der Methode der kleinsten Quadrate die „beste“ den Nullpunkt enthaltende Gerade zwischen sie hindurch. Deren Steigung

$$\frac{\sum z_{mi} \cdot z_{m+1,i}}{\sum z_{mi} \cdot z_{mi}} = \frac{\delta_m' \delta_{m+1}}{\delta_m' \delta_m} = R \approx \lambda \quad (5.5)$$

heißt hier der „Rayleighsche Quotient“ und stellt im allgemeinen einen ausgezeichneten Näherungswert für λ dar (Abb. 7 für $m = 3$). Für gewisse Klassen von Matrizen gibt es überdies Einschließungssätze mit genau angebbaren oberen und unteren Schranken.

Hier wird nun der aus δ_5 und δ_6 gebildete Rayleighsche Quotient:

$$R = \frac{\delta_5' \delta_6}{\delta_5' \delta_5} = \frac{82400}{9180} = 8,976 \approx \tilde{\lambda}_2 \quad (5.6)$$

also, wenn man die Spektralverschiebung rückgängig macht:

$$\lambda_2 = \tilde{\lambda}_2 - 6 = 2,976 \quad (5.7)$$

Der genaue Wert ist $\lambda_2 = 3$.

Beispiel 2: Ein Schwingungssystem nach Art der Abb. 8 (Kurbelwelle) mit n starren Scheiben hat stets n verschiedene reelle Eigenschwingungszahlen $\omega_i^2 = \lambda_i C/J$, und zwar ist der kleinste Eigenwert $\lambda_0 = 0$ (Rotation als starrer Körper), alle übrigen Eigenwerte aber sind positiv. Der zur Rotation gehörige Eigenvektor ist offensichtlich $x_0' = (1, 1, \dots, 1)$. Gesucht wird in der Praxis vor allem der kleinste positive Eigenwert λ_1 . Für das Beispiel der Abb. 8 ist insbesondere:

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

3J

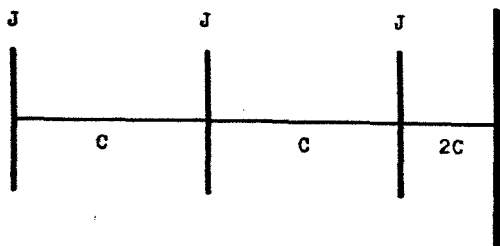


Abb. 8. Elastische Welle mit vier starren Scheiben, Beispiel 2.

Hier ist es nun bequem, mit dem Paar $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}, \mathfrak{E}$ zu iterieren, (4.5) geht dann über in

$$\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^* = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A} + \frac{\sigma - \lambda_0}{\mathfrak{r}_0' \mathfrak{B} \mathfrak{r}_0} \cdot \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_0' \mathfrak{B} \quad (5.9)$$

Wir wählen etwa $\sigma = 6$ und rücken das ganze Spektrum um 5 nach links, was für die Konvergenz gegen λ_1 genügt, denn die Summe aller vier Eigenwerte ist gleich $6,667 = \text{Spur von } \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}$. Um nicht die Nullen in \mathfrak{A} und somit in $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}$ zu verwischen, rechnen wir in der Form 5 II) und bekommen wegen $\lambda_0 = 0$:

$$\mathfrak{z}_m = \left\{ (\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A} - 5 \mathfrak{E}) + \frac{6-0}{6} \mathfrak{r}_0 (\mathfrak{B} \mathfrak{r}_0)' \right\} \mathfrak{z}_{m-1} \quad (5.10)$$

oder

$$\mathfrak{z}_m = (\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A} - 5 \mathfrak{E}) \mathfrak{z}_{m-1} + \mathfrak{r}_0 \cdot d_{m-1} \text{ mit } d_{m-1} = (\mathfrak{B} \mathfrak{r}_0)' \mathfrak{z}_{m-1} \quad (5.11)$$

Wir beginnen mit einem Vektor \mathfrak{z}_0 , der auf $\mathfrak{B} \mathfrak{r}_0$ senkrecht steht, und iterieren mit leichten Abrundungen:

$$(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A} - 5 \mathfrak{E}) \begin{array}{c} \mathfrak{z}_0 \\ \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \mathfrak{z}_1 \\ \left[\begin{array}{c} -9 \\ -5 \\ 1 \\ 4 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \mathfrak{z}_2 \\ \left[\begin{array}{c} 40 \\ 24 \\ -6 \\ -19 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \mathfrak{z}_3 \\ \left[\begin{array}{c} -183 \\ -105 \\ 27 \\ 87,33 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \mathfrak{z}_4 \\ \left[\begin{array}{c} 838 \\ 472 \\ -122,67 \\ -395,2 \end{array} \right] \end{array}$$

$$- \left[\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0,67 & 4,33 \end{array} \right] \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} -9 \\ -5 \\ 1 \\ -4,33 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 41 \\ 25 \\ -5 \\ -18 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} -184 \\ -106 \\ 26 \\ 86,33 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 837 \\ 471 \\ -123,67 \\ -396,2 \end{array} \right] \end{array}$$

$$(\mathfrak{B} \mathfrak{r}_0)' = (1, 1, 1, 3) \quad \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & 1 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{array}$$

Nach jedem Schritt wird das Produkt $\mathfrak{r}_0 \cdot d_{m-1}$ gebildet und nach (5.11) zum ersten Summanden addiert. Nach Abb. 9 konvergiert die Folge recht gut. Der Rayleighsche Quotient wird

$$R = \frac{\mathfrak{z}_3' \mathfrak{z}_4}{\mathfrak{z}_3' \mathfrak{z}_3} = \frac{-240\,739}{52\,870} = -4,553 \approx \tilde{\lambda}_1 \quad (5.12)$$

und somit

$$\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1 + 5 = 0,447; \quad \omega_1^2 \approx 0,447 \text{ C/J} \quad (5.13)$$

Der genaue Wert ist $\lambda_1 = (4 - \sqrt{7})/3 = 0,455$.

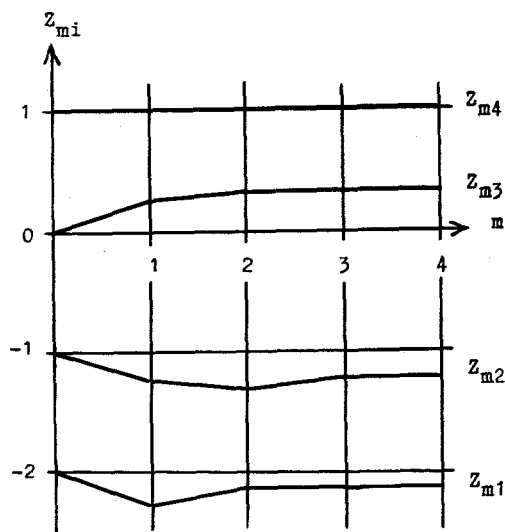


Abb. 9. Die Iterationsfolge $z_0 \dots z_4$ für das Beispiel 2.

6. Verallgemeinerungen

Wir gehen abschließend auf die Voraussetzung (1.2) zurück: die Regularität der Matrix \mathfrak{B} läßt sich im Hinblick auf die Iterationsvorschrift (2.1) natürlich nicht entbehren, sind aber bei regulärem \mathfrak{B} weniger als n linear unabhängige Eigenvektoren vorhanden — was übrigens nur bei mehrfachen Eigenwerten möglich ist —, so werden in den Matrizen (1.3) die fehlenden Eigenvektoren durch sogenannte Hauptvektoren ersetzt, und die Diagonalmatrix \mathfrak{L} der Eigenwerte λ_i geht in eine einfach gebaute Dreiecksmatrix \mathfrak{S} , die Jordansche Normalform über. (Eine ausführliche Darstellung dieses Sachverhaltes findet man bei *Zurmühl* [4]). Das Konvergenzverhalten in den Fällen (2.8) bzw. (2.9) bleibt im wesentlichen das gleiche; ebenso gelten die Formeln (4.1), (4.5) usw. nach wie vor.

7. Zusammenfassung

Wir haben gezeigt, wie sich mit Hilfe des Ersatzwertverfahrens die Konvergenz gegen beliebige Eigenwerte erzwingen läßt, wenn die Eigenwerte mit den größten Beträgen und ihre Eigenvektoren bekannt sind. An zwei einfachen Beispielen wurde die Methode vorgeführt und durch zahlreiche Abbildungen anschaulich gemacht.

8. Literatur

- [1] *E. Bodewig*, Bericht über die Methoden zur numerischen Lösung von algebraischen Eigenwertproblemen. Atti del seminario matematico e fisico dell' universita di Modena. Vol. IV (1949—50) und Vol. V (1950—51).
- [2] *H. Hotelling*, Analysis of a complex of statistical variables into principal components, Journal educational psychology, Baltimore, 24, 1933. S. 417—441 und 498—520.
- [3] *J. J. Koch*, Verhandl. 2. internat. Congr. f. Techn. Mech., Zürich 1926, S. 213—218.
- [4] *R. Zurmühl*, Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure. Springer-Verlag 1950.